Université Paris-PANTHÉON-ASSAS — U.E.F.1/5009
Droit-Economie-Sciences Sociales — ASSAS-MELUN

Session:	Janvier 2024.
Année d'étude:	Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion.
Discipline:	**Statistiques 3** (Unité d'Enseignements Fondamentaux 1).
Titulaire du cours:	M. Youcef ASKOURA.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice autorisée. Documents interdits, ainsi que tout autre appareil électronique.

Examen de Statistique 3 (5009): session janvier 2024. Durée 1h30.

Ce sujet comporte 2 pages. Avant de composer, veuillez vérifier que votre sujet est complet.

Exercice 1. (1 pts) Choisissez à chaque fois la bonne réponse (sans justifier : recopier simplement le numéro de la réponse correcte).

I. Dans un espace probabilisé : pour un système complet d'évènements A_i, $i = 1, ..., n$, $P(A_i|A_j)$ ne peut prendre que l'une des deux valeurs 0 ou 1 pour tout couple d'indices $i, j \in \{1, ..., n\}$.
(1) vrai
(2) faux

II. La somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suit :
(3) la loi uniforme si X et Y suivent toutes les deux la loi uniforme.
(4) la loi normale si X et Y suivent toutes les deux la loi normale.
(5) hypergéométrique si toutes les deux suivent la même loi binomiale $B(p, n)$.

Exercice 2. (2 pts) [Les questions I. et II. sont indépendantes.]
On jette, d'une façon indépendante, une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce que pile apparaisse. Notons n le nombre d'expériences (lancers) nécessaire.
I. On gagne $X = 1$€ si $n < 5$, $X = 10$€ si $n \in \{5, ..., 20\}$, on perd 10€ sinon (ce qui revient à poser $X = -10$).
Donner la loi de X.
II. On gagne $Z = 5n - 10$€. Donner l'espérance du gain Z.

Exercice 3. (2 pts) Un marchand de glaces vend, en une journée type, un nombre d'unités équiprobable entre 201 et 350. Chaque glace lui rapporte 2€ de bénéfice. Donner l'espérance du bénéfice du marchand.

Exercice 4. (3 pts)
On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie en tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 1, \\ e^{-x+1}, \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilités.
2. Soit X une v.a. ayant pour densité f.

2.a. Donner la fonction de répartition de X. Donner $P(0 \leq X \leq 2)$.

2.b. Donner la densité de $Y = X^2$.

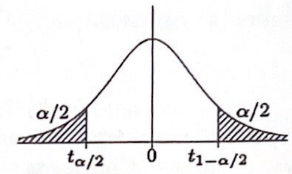
Exercice 5. (2 pts)
On prélève un échantillon de taille $n = 61$ de loi parente $N(\mu, \sigma)$. Notons, respectivement, $\overline{X}$ et S^2 la moyenne empirique et la variance empirique corrigée de l'échantillon aléatoire de taille n correspondant. On mesure sur l'échantillon les valeurs de $\overline{X} = 11$, et $S = 6$.
1. Quelle est la loi de $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$?
2. Donner un intervalle de probabilité 90% pour μ.

TABLE 6. Table de la loi T de Student

Si T est une variable aléatoire suivant la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α fixé, la valeur $t_{1-\alpha/2}$ telle que

$$\mathbb{P}\{|T| \geqslant t_{1-\alpha/2}\} = \alpha.$$

Ainsi, $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student à ν degrés de liberté.



ν \ α	0,900	0,500	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6193
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
60	0,1262	0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	0,1257	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Lorsque $\nu = \infty$, $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.