UNIVERSITE PARIS 2 PANTHEON-ASSAS - Mai 2023 - Première année de licence économie-gestion - Mathématiques 2 - Mme Morhaim - 1h30 - UEF2 - Code matière : L25298AC

Le sujet comporte 30 questions et les questions sont indépendantes. Pour chaque question, il y a une seule réponse juste. La caculatrice n'est pas autorisée.

Q 1 Le système $(S) = \begin{cases} x + 2a^3y - z = 5 \\ x + 4y - 8z = 4 \\ 4x + 4y + z^{2-m} = 2b^2 \end{cases}$, d'inconnue le triplet de réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres $a, b, m \in \mathbb{R}$, est un système linéaire si et seulement si
a) $m \in \{0, 2\}$
b) $b = 1$
c) $a = 1$
d) $a = 1, b = 1$ et $m = 0$
e) aucune de ces propositions

Q 2 Si on considère un système de 4 équations linéaires d'inconnue le triplet de réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
a) ce système n'a pas de solutions.
b) ce système admet une infinité de solutions.
c) ce système admet une solution unique ou une infinité de solutions.
d) ce système admet une infinité de solutions ou n'a pas de solutions.
e) aucune de ces propositions.

Q 3 On considère le système $(S) = \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ \frac{1}{2}my - 2z = -1 \\ kz = 2m \end{cases}$, d'inconnue le triplet de réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres $a, b \in \mathbb{R}$. On a
a) quel que soit m, si $k \neq 0$, alors (S) a une unique solution
b) si $m = 0$, alors quel que soit k, (S) n'a pas de solution
c) si $m = 0$ et $k = 0$, alors (S) admet une infinité de solutions
d) si $m = 0$ et $k = 1$, alors (S) admet une infinité de solutions
e) aucune de ces propositions

Q 4 Le système $(S) = \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = 2 \\ 4x + 2y + z = 4 \end{cases}$ d'inconnue le triplet de réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
a) n'a pas de solution
b) admet une solution unique
c) admet une infinité de solutions
d) aucune de ces trois propositions

Q 5 L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -x - y \leq 1\}$ est
a) ouvert et fermé b) ouvert et non fermé c) non ouvert et fermé d) non ouvert et non fermé

Q 6 L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, 4 \leq 2x + y \leq 8$ et $x + y > 1\}$ est
a) ouvert et fermé b) ouvert et non fermé c) non ouvert et fermé d) non ouvert et non fermé

Q 7 L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0$ et $2x + y - 1 < 4\}$ est
a) ouvert et fermé b) ouvert et non fermé c) non ouvert et fermé d) non ouvert et non fermé

Q 8 L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 2$ et $x + y \leq 1\}$ est
a) ouvert et borné b) ouvert et non borné c) non ouvert et borné d) non ouvert et non borné

Q 9 L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1\}$ est
a) une boule ouverte b) une boule fermée c) un cercle d) aucune de ces trois propositions

$\boxed{\textbf{Q 10}}$ L'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 10 < (x-2)^2 + y^2 < 24\}$ est
a) fermé et borné b) fermé et non borné c) ouvert et borné d) ouvert et non borné

$\boxed{\textbf{Q 11}}$ On considère les ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 1 \text{ et } -2x + y > 4\} \text{ et } F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y \leq 1\}$$

Parmi ces deux ensembles, le(s)quel(s) est (sont) compacts(s) ?
a) aucun des deux b) seulement E c) seulement F d) les deux ensembles E et F

$\boxed{\textbf{Q 12}}$ On considère $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = 2$. Parmi les ensembles suivants, combien sont convexes ?

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1 \text{ et } y \geq 1\}$$
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 4 \text{ et } 0 \leq y \leq 4\} \cup \mathcal{D}$$
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \text{ et } y \neq 1\}$$

a) aucun des trois b) un seul c) seulement deux d'entre eux d) les trois

$\boxed{\textbf{Q 13}}$ On considère les ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y \leq 2\} \text{ et } F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y > 8\}$$

Parmi ces deux ensembles, le(s)quel(s) est (sont) convexe(s) ?
a) aucun des deux b) seulement F c) seulement E d) les deux ensembles E et F

$\boxed{\textbf{Q 14}}$ Quel est le gradient de la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = -x^3 - 2xy^2 + y$

a) $(-3x - 2y^2, -2x + 1)$ b) $(-3x^2 - 2y^2, -2x + y)$ c) $(-3x^2, 1)$ d) aucune de ces propositions

$\boxed{\textbf{Q 15}}$ On considère les fonctions f_1, f_2 et g définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^3 \qquad f_2(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy^2$$

et $g(x, y) = (2x - 2y^2, -2x + 3y^2)$. La fonction g est le gradient de

a) des deux fonctions f_1 et f_2 b) seulement f_1 c) seulement f_2 d) aucune de ces deux fonctions

$\boxed{\textbf{Q 16}}$ Dans le cadre vu en cours cette année, un demi-plan est

a) convexe et borné b) convexe et non borné c) non convexe et borné d) non convexe et non borné

$\boxed{\textbf{Q 17}}$ On considère les deux problèmes d'optimisation $(P1)$ et $(P2)$ suivants. Le(s)quel(s) satisfont les conditions du théorème de Weierstrass ?
Rappel : théorème de Weierstrass de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. *Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et E est un ensemble compact de $\mathbb{R}^2$, alors f atteint son maximum et son minimum sur E.*

$$(P1) = \begin{cases} \text{Optimiser} & f_1(x, y) = e^{x - y + 2y^2} \\ \text{sous contraintes} & 2x - y < 1 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \qquad (P2) = \begin{cases} \text{Optimiser} & f_2(x, y) = e^{8x - y^4} \\ \text{sous contraintes} & 2x + y \leq 2 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

a) aucun b) seulement $(P1)$ c) seulement $(P2)$ d) les deux problèmes $(P1)$ et $(P2)$

$\boxed{\textbf{Q 18}}$ On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = e^{xy} - 4xy^2$. Le gradient de f est

a) $\nabla f(x,y) = (ye^{xy} - 2y^2, xe^{xy} - 4y)$
b) $\nabla f(x,y) = (ye^{y} - 2y^2, xe^{x} - 8xy)$
c) $\nabla f(x,y) = (ye^{xy} - 4y^2, xe^{xy} - 8xy)$
d) aucune de ces propositions

$\boxed{\textbf{Q 19}}$ La fonction f définie de $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \ln(y) - e^{2x}$ est

a) convexe et concave sur E
b) seulement concave sur E
c) seulement convexe sur E
d) ni convexe ni concave sur E

$\boxed{\textbf{Q 20}}$ Soit a un réel. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 + ay^2 - 2xy$$

est convexe sur $\mathbb{R}^2$ pour tout réel

a) $a > 0$ b) $a < 0$ c) $a < 1$ d) $a > 1$ e) aucune de ces propositions

$\boxed{\textbf{Q 21}}$ Sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = 2x^2y + y^3$ est

a) ni convexe ni concave sur son domaine de définition
b) seulement concave sur son domaine de définition
c) seulement convexe sur son domaine de définition
d) convexe et concave sur son domaine de définition

$\boxed{\textbf{Q 22}}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -y^4 - y^3 + y^2 + x^2$. Combien de point(s) critique(s) la fonction f admet-elle sur $\mathbb{R}^2$?

a) 3   b) 2   c) 1   d) 0   e) aucune de ces propositions

$\boxed{\textbf{Q 23}}$ On considère une fonction f de deux variables deux fois continûment différentiable et qui admet $(0,2)$ comme point critique. On sait que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,2) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2) = -8$$

Le point critique $(0,2)$ donne pour f

a) un point-selle
b) un minimum
c) un maximum
d) il faut des informations supplémentaires pour pouvoir conclure s'il donne un minimum, un maximum ou un point-selle

$\boxed{\textbf{Q 24}}$ On considère une fonction f de deux variables deux fois continûment différentiable et qui admet $(1,0)$ comme point critique. On sait que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = 5 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 4$$

Le point critique $(1,0)$ donne pour f

a) un minimum
b) un maximum
c) un point-selle
d) il faut des informations supplémentaires pour pouvoir conclure s'il donne un minimum, un maximum ou un point-selle

$\boxed{\text{Q 25}}$ La fonction $f(x,y) = -x^3 + x + 2y^3 - y$
a) admet $(1,1)$ parmi ses points critiques
b) admet $(0,0)$ parmi ses points critiques
c) n'admet pas de point critique
d) aucune de ces propositions

$\boxed{\text{Q 26}}$ La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie et continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$ admet un point critique en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Quelle propriété garantit que f admet alors un maximum global en (a,b) ?
a) f est convexe sur son domaine de définition
b) f est concave sur son domaine de définition
c) f est convexe autour de (a,b)
d) f est concave autour de (a,b)
e) aucune de ces propositions

$\boxed{\text{Q 27}}$ On considère f et g définies sur $\mathbb{R}^2$. On étudie le problème d'optimisation $\left\{\begin{array}{cc} \text{Optimiser} & f(x,y) \\ \text{s.c.} & g(x,y) = 0 \end{array}\right.$, et on trouve que $(1,5)$ est un point critique du lagrangien de multiplicateur $\lambda = 4$ et la matrice hessienne du lagrangien en $\lambda = 4$ est $\nabla^2 \mathcal{L}_{\lambda=4}(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -2y^2 \end{pmatrix}$. Alors on peut en conclure que sous la contrainte $g(x,y) = 0$,
a) le minimum de f sous la contrainte est 4
b) f admet un minimum global en $(1,5)$ sous la contrainte
c) f admet un maximum global en $(1,5)$ sous la contrainte
d) aucune de ces propositions

$\boxed{\text{Q 28}}$ On cherche à minimiser la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x;y) = (x-1)^2 + y^2$ sous la contrainte $2x - y = 0$. On trouve que f sous la contrainte
a) admet un minimum global atteint en un unique point.
b) admet un minimum global atteint en plusieurs points.
c) admet au moins un minimum local mais pas de minimum global.
d) n'admet pas de minimum.
e) aucune de ces propositions.

$\boxed{\text{Q 29}}$ On considère les problèmes suivants :

$$(\mathcal{P}_1) = \left\{\begin{array}{cl} \text{Optimiser} & f(x,y) = x - xy + 1 \\ \text{sous contraintes} & x^2 + y^2 = 1 \\ & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}_2) = \left\{\begin{array}{cl} \text{Optimiser} & f(x,y) = e^{x-xy+1} \\ \text{sous contraintes} & x^2 + y^2 = 1 \\ & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right.$$

a) les problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont les mêmes solutions
b) les solutions de $(\mathcal{P}_1)$ sont aussi solutions de $(\mathcal{P}_2)$ mais $(\mathcal{P}_2)$ admet des solutions qui ne sont pas solutions de $(\mathcal{P}_1)$
c) les solutions de $(\mathcal{P}_2)$ sont aussi solutions de $(\mathcal{P}_1)$ mais $(\mathcal{P}_1)$ admet des solutions qui ne sont pas solutions de $(\mathcal{P}_2)$
d) les problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ n'ont aucune solution en commun.

$\boxed{\text{Q 30}}$ L'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 5\}$ peut s'écrire aussi sous la forme
a) $E = \{(x,y) = \lambda(\sqrt{5},0) + (1-\lambda)(0,\sqrt{5}), \lambda \in [0,1]\}$
b) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$
c) $E = \{(x,y) = \lambda(2,-1) + (1-\lambda)(-1,2), \lambda \in [0,1]\}$
d) aucune de ces trois propositions